

欠驱动自行车机器人动态平衡建模与三环 PID 控制研究

关皓轩，段雨薇，李思奇

(北华航天工业学院电子与控制工程学院，河北 廊坊 065000)

摘要：针对欠驱动自行车机器人的动态平衡控制能力不足问题,本文设计了一种三环 PID 动态平衡控制器，该方法采用建立动力学模型，通过拉格朗日方法进行数学分析，分析车体倾角、飞轮转速和电机力矩之间的闭环传递函数关系。在动力学模型建立的条件下，设计了速度环、角度环和角速度环组成的三环 PID 控制器，同时利用小角度线性化模型对系统稳定性进行分析。最后通过实车实验结果表明，该三环控制方法能够使自行车机器人在一定倾角范围内保持平衡，受到外部扰动后也能较快恢复稳定。

关键词：欠驱动自行车机器人；动态平衡；反作用飞轮；三环 PID；姿态控制

基金项目：北华航天工业学院创新资助项目“无人驾驶自行车的自主平衡控制与循迹技术研究”(YKY-2025-13)；河北省高等学校科学技术项目“具备感知行为的机器人诊疗康复交互演化机理研究”(QN2024181)

1. 引言

自行车机器人只靠前后两个车轮支撑，横向稳定性较弱，尤其在低速或静止时更容易发生侧倾。由于其本身具有欠驱动、非线性和耦合性强等特点，如何实现车体自主平衡，成为后续路径跟踪、视觉导航和无人驾驶控制的基础问题^{[1]-[3]}。现有自行车机器人平衡方式主要有车把转向、质量块移动和反作用飞轮控制等。车把转向对车速依赖较大，低速时效果不明显；质量块移动虽然原理简单，但机构较复杂、响应较慢；反作用飞轮通过改变飞轮转速来产生补偿力矩，低速状态下也能调节车体姿态，因此更适合小型欠驱动自行车机器人^{[4]-[6]}。在控制方法上，模糊控制、滑模控制、自抗扰控制和强化学习等都可用于这类非线性系统，但实际应用中往往存在调参复杂、计算量大、实现难度高等问题。相比之下，PID 控制思路简单、响应快，容易部署在 STM32 等嵌入式平台上，因此在机器人姿态控制中仍较为常用^{[7]-[9]}。

基于上述分析，本文以反作用飞轮式欠驱动自行车机器人为研究对象，建立车体横向平衡模型，分析车体倾角、飞轮转速和电机力矩之间的关系，并设计三环 PID 平衡控制器。通过稳定性分析和样机实验，验证该方法在自行车机器人动态平衡控制中的可行性。

2. 硬件设计与工作原理

自行车机器人主要由车体机械结构、反作用飞轮机构、姿态检测模块、驱动执行模块和主控系统组成。

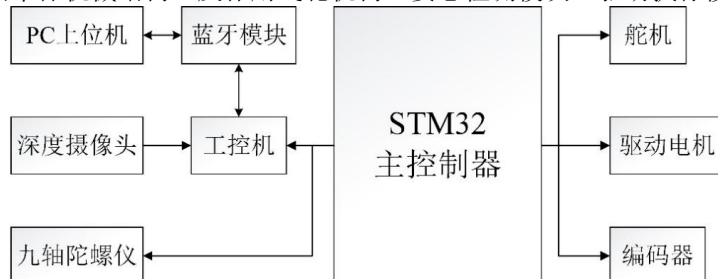


图1 系统硬件框图

系统硬件框图如图1所示，STM32 开发板负责各传感器模块数据处理以及系统执行机构命令的下发；陀螺仪惯性测量单元负责监测并上报车体姿态数据；摄像头模块负责小车路径信息与障碍物信息数据采集；舵机

作者简介：关皓轩(2002—)，男，硕士研究生，研究方向为控制工程；

段雨薇(2005—)，女，在读本科生，研究方向为控制工程；

李思奇(1984—)，女，讲师，硕士生导师，研究方向为控制工程。

通讯作者：关皓轩，邮箱：hoshine@stumail.nciae.edu.cn

模块主要负责控制自行车车把的转向；驱动电机分为平衡动量轮驱动电机和后轮动力驱动电机，分别负责车体平衡和提供小车前进动力；编码器则主要负责反馈驱动电机实时工作数据；PC 上位机主要负责人机交互和监测系统实时状态；工控机则负责通过蓝牙模块接收 PC 上位机命令进行实时处理并反馈状态。

3. 欠驱动自行车机器人动力学建模

为分析自行车的平衡与转向耦合特性，将系统建模为反作用轮倒立摆模型，如图 2 所示：

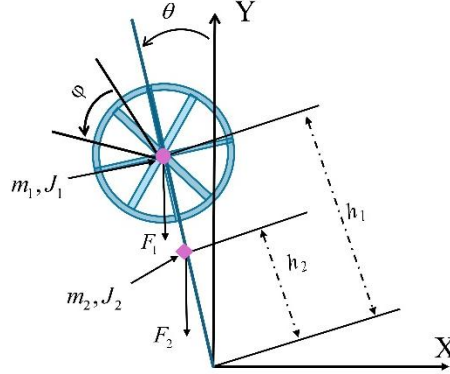


图 2 自行车机器人系统模型

其中， m_1, m_2 分别为飞轮质量与自行车总质量(不含飞轮)， h_1, h_2 为飞轮与自行车重心高度， g 为重力加速度， J_1, J_2 为飞轮及车身绕各自轴的转动惯量， θ 为车身对 Y 轴倾斜角， φ 为飞轮旋转角度， A 为系统的等效质量力矩， B 为系统绕横滚轴的等效转动惯量， $F_1 = m_1 h_1 g \cos \theta, F_2 = m_2 h_2 g \cos \theta$ 分别为飞轮与车身自身的重力势能。

定义系统拉格朗日函数为：

$$L = T - V \quad (4.2)$$

其中， T 和 V 分别表示系统总动能和总势能， Q_i 为广义力， q_i 为广义坐标。

根据拉格朗日方程，可建立系统动力学模型：

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (4.3)$$

总动能为 $T = T_1 + T_2$ ，设 T_1 车身的动能， T_2 飞轮的动能，为牵连与相对运动动能的耦合。

$$T = \frac{1}{2} A \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}^2 + J_1 \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\varphi} \quad (4.4)$$

系统总势能 V 如下：

$$V = B g \cos \theta \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} A = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + J_1 + J_2 \\ B = m_1 h_1 + m_2 h_2 \end{cases}$$

取 $q_1 = \theta$ 、 $q_2 = \varphi$ ，外力矩电机扭矩 T_m 与外力矩 T_{dist} ，由式(1.1-1.4)推导得：

$$\begin{cases} A \ddot{\theta} + J_1 \ddot{\varphi} - B g \cos \theta = T_{dist} \\ J_1 (\ddot{\theta} + \ddot{\varphi}) = T_m \end{cases} \quad (4.6)$$

上述方程分别描述了车体横向倾斜和飞轮转动过程中的力矩平衡关系，反映了车体惯性力矩、飞轮惯性力矩、电机输出力矩与重力倾覆力矩之间的耦合关系，为后续小角度线性化、传递函数推导和控制器设计提供了理论基础。在动态平衡过程中，车体横滚角通常在零位置附近小幅波动，即 $\theta \approx 0$ ，并满足 $\sin \theta \approx \theta$ ，同时，小角度线性化仅在车体接近直立平衡位置时成立。令实际电机转速，即飞轮角速度为 $n_1 = \dot{\varphi}$ ，通过拉普拉斯变换可得到如下简化模型：

$$\begin{cases} A s^2 \theta + J_1 s n_1 - B g \theta = 0 \\ T_m = J_1 s^2 \theta + J_1 s n_1 \end{cases} \quad (4.7)$$

由式(3.6)中的第一个方程可知，自行车车体倾角 θ 与飞轮转速 n_1 之间的关系为：

$$\theta = -\frac{J_1 s}{B s^2 - A g} n_1 \quad (4.8)$$

这表明, 飞轮转速的变化会通过惯性耦合作用于车体横向倾角, 从而实现对自行车机器人姿态的调节。为了建立完整的被控对象模型, 进一步推导期望电机力矩 τ_{ref} 与飞轮转速 n_1 之间的动态关系。本文假设电机具有足够快的动态响应能力, 能够无误差地跟踪控制器输出的期望力矩 τ_{ref} [6]。因此, 在建模过程中, 可将电机输出力矩直接视为 τ_{ref} , 从而建立控制输入与系统状态之间的直接对应关系, 根据拉格朗日方程, 电机不仅直接驱动飞轮旋转, 而且还与自行车车体的倾斜运动存在耦合关系[6]。将自行车车体倾角 θ 与飞轮转速 n_1 之间的关系代入式(3.6)中的第二个方程, 可推导出飞轮转速 n_1 与期望电机力矩 τ_{ref} 之间的传递函数:

$$n_1 = \frac{Bs^2 - Ag}{J_1(B - J_2)s^3 - AgJ_1s} \tau_{ref} \quad (4.9)$$

上述式(3.8)揭示了控制输入与系统输出之间的动态耦合特性, 建立了完整的被控对象模型, 并为后续控制器设计和稳定性分析提供了理论基础。

4. 三环 PID 平衡控制器设计

基于动力学模型, 设计级联三环 PID 控制器, 如图 3 所示:

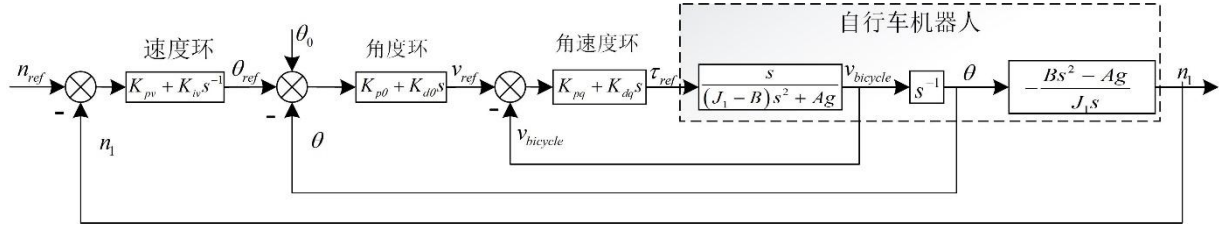


图 3 三环 PID 串级控制方框图

速度环的控制目标是使飞轮转速稳定跟踪目标值, 由于飞轮转速会受到摩擦、电机负载和模型误差等因素影响, 因此速度环采用 PI 控制, 以减小稳态误差, 其表达式为:

$$\theta_{ref} = K_{pv}(n_{ref} - n_1) + K_{iv} \int (n_{ref} - n_1) d\tau \quad (5.2)$$

其中, n_{ref} 为目标飞轮转速, n_1 为实际飞轮转速, K_{pv} 为速度环比例系数, K_{iv} 为速度环积分系数。

角度环的控制目标是使车体倾角保持在目标平衡角附近。由于车体倾角直接反映机器人是否发生侧倾, 因此角度环主要承担姿态修正作用。为提高响应速度并抑制超调, 角度环采用 PD 控制:

$$v_{ref} = K_{p\theta}(\theta_{ref} - \theta - \theta_0) + K_{d\theta}(\dot{\theta}_{ref} - \dot{\theta} - \dot{\theta}_0) \quad (3.2)$$

其中, θ_{ref} 为目标平衡角, θ 为实际车体倾角, $K_{p\theta}$ 和 $K_{d\theta}$ 分别为角度环比例系数和微分系数。

角速度环的控制目标是抑制车体横滚角速度, 提前反映车体倾倒趋势, 提高系统阻尼。其控制表达式为:

$$\tau_{ref} = K_{pq}(v_{ref} - v_{bicycle}) + K_{dq}(\dot{v}_{ref} - \dot{v}_{bicycle}) \quad (3.3)$$

其中, $v_{bicycle}$ 表示车体横滚角速度, v_{ref} 为目标角速度, K_{pq} 和 K_{dq} 分别为角速度环比例系数和微分系数。

上述表明, 三环 PID 参数必须满足相应的稳定性约束, 结合串级控制器可知, 角速度控制首先决定系统阻尼特性, 角度环控制进一步影响姿态恢复能力, 速度环控制主要影响系统低频动态特性。因此, 参数整定应遵循由内到外逐级闭环的原则, 以保证系统具有足够稳定裕度, 与此同时, 三环控制器相比单环 PID, 该结构层次更清晰, 通过三次解算, 提高车体平衡稳定性的同时又便于嵌入式实现和参数调试。

5. 稳定性分析与参数设计

欠驱动自行车机器人属于非线性系统, 完整稳定性分析较为复杂。考虑到本文研究重点是车体在直立平衡位置附近的小角度动态稳定问题, 因此基于小角度线性化模型进行局部稳定性分析。

为了简化分析, 保留三环控制器中的主要比例反馈作用, 建立闭环特征方程。

$$\frac{n_1}{n_{ref}} = \frac{BK_{pv}K_{p\theta}K_{pq}s^2 - Ag(K_{pv}K_{p\theta}K_{pq})}{(B - J_1)J_1s^3 + (BK_{pv}K_{p\theta} - J_1)K_{pq}s^2 + (-K_{p\theta}K_{pq} - Ag)J_1s - AgK_{pv}K_{p\theta}K_{pq}} \quad (5.2)$$

根据劳斯稳定判据，若闭环系统特征方程对应 Routh 表第一列元素均为正，则系统满足渐近稳定条件。

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_0 \\ s & b_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= (B - J_{fly})J_1 & a_2 &= (-K_{p\theta}K_{pq} - Ag)J_1 \\ a_1 &= (BK_{pv}K_{p\theta} - J_1)K_{pq} & a_0 &= AgK_{pv}K_{p\theta}K_{pq} \\ b_1 &= AgK_{pv}K_{p\theta}K_{pq}J_1(B - J_1) - (BK_{pv}K_{p\theta} - J_1)(K_{p\theta}K_{pq} + Ag)J_1K_{pq} \end{aligned}$$

由分析可知，控制器参数需要满足以下基本关系：

$$K_{pq} < 0 \quad \text{且} \quad K_{pv}K_{p\theta} > 0 \quad (5.2)$$

式 (5.2) 表明，角速度环应采用正确的负反馈方向，速度环与角度环的反馈方向也需相互匹配，以避免反向控制导致系统失稳。参数整定时可按照由内到外、由小到大的原则进行，先调角速度环增强阻尼，再调角度环使车体回到平衡位置，最后调速度环保证飞轮转速平稳。结合样机参数进行根轨迹分析可知，在所选参数下闭环极点均位于复平面左半平面，说明系统在小角度平衡区域内具有局部稳定性，如图 4 所示，也验证了三环 PID 控制器的有效性。

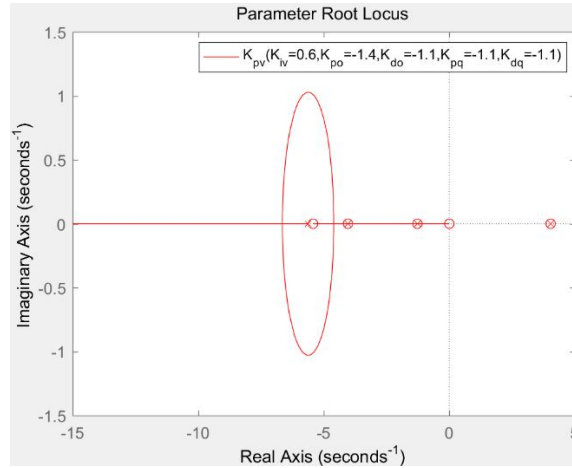


图 4 根轨迹分析

6. 实验验证

为验证所设计控制方法的有效性，搭建欠驱动自行车机器人样机平台，如图 5 所示。



图 5 自行车机器人实车图

实验过程中，IMU 实时采集车体倾角和角速度，编码器检测平衡飞轮的转速，STM32 主控制器根据三环控制器解算电机控制量，并驱动平衡飞轮产生反作用力矩。姿态稳定范围实验中，将自行车机器人分别调整到不同的初始倾角，观察其能否在控制作用下重新回到平衡状态，由图 6 可以看出，当车把倾角控制在约 $\pm 4.5^\circ$ 以内时，

反作用飞轮能够提供足够的电机补偿力矩,使得自行车机器人可以保持稳定;当车把倾角继续增大时,车体受到的重力倾倒作用明显增强,飞轮产生的补偿力矩不足以使其恢复平衡,系统容易出现失稳现象。

自行车机器人姿态稳定范围示意图



图6 自行车机器人姿态稳定范围示意图

其次进行动态平衡实验,在机器人运行过程中,实验表明系统能够在行进过程中持续修正车体横向姿态,使车体倾角保持在较小范围内波动,未出现明显持续振荡或失稳现象。



(a) 动态平衡第 1 秒

(a) 动态平衡第 3 秒

(a) 动态平衡第 5 秒

(a) 动态平衡第 7 秒

图7 动态平衡示意图

综合实验结果可知,基于反作用飞轮的三环 PID 控制方法能够满足欠驱动自行车机器人基本动态平衡需求,具有结构简单、实时性好、工程实现方便等优点。

7. 结论

本研究针对欠驱动自行车机器人的动态平衡问题,建立了自行车机器人的动力学模型,并通过拉格朗日方法分析了车体倾角、飞轮转速和电机力矩之间的闭环传递函数关系。在上述基础上,设计了速度环、角度环和角速度环组成的级联式三环 PID 控制器,同时对系统的小角度稳定性进行了分析。该方法通过实车验证表明,该控制器能够使自行车机器人在一定倾角范围内保持平衡,受到外部扰动后也能较快恢复稳定。后续将进一步结合视觉识别和路径规划方法,提高机器人在复杂道路环境下的自主循迹能力。

参考文献:

- [1] Meijaard J P, Papadopoulos J M, Ruina A, et al. Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review[J]. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2007, 463(2084): 1955-1982.
- [2] Åström K J, Klein R E, Lennartsson A. Bicycle dynamics and control: adapted bicycles for education and research[J]. IEEE Control Systems Magazine, 2005, 25(4): 26-47.
- [3] Getz N H, Marsden J E. Control for an autonomous bicycle[C]// Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Nagoya, Japan: IEEE, 1995: 1397-1402.
- [4] Block D J, Åström K J, Spong M W. The Reaction Wheel Pendulum[M]. San Rafael: Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- [5] Spong M W, Hutchinson S, Vidyasagar M. Robot Modeling and Control[M]. New York: John Wiley & Sons, 2006.

- [6] Siqi Li, Haoxuan Guan, Jingzhong Ge, et al. Mathematical Modeling and Vision-Guided Triple-Loop Control of an Underactuated Bicycle Robot[J]. Mathematics, 2026, 14(12): 2160.
- [7] Ogata K. Modern Control Engineering[M]. 5th ed. New Jersey: Prentice Hall, 2010.
- [8] 刘金琨. 先进 PID 控制及其 MATLAB 仿真[M]. 北京: 电子工业出版社, 2020.
- [9] Duc L T, Sy P H, Van D P, et al. Observer-Based Hybrid PID Control for Trajectory Tracking of Wheeled Mobile Robot Subject to Disturbances[C]. Advances in Information and Communication Technology. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 1205. Springer, Cham, 2025: 566-574.

Research on Dynamic Balance Modeling and Triple-Loop PID Control of an Underactuated Bicycle Robot

Haoxuan Guan, Yuwei Duan, Siqi Li

School of Electronic and Control Engineering, North China Institute of Aerospace Engineering, Langfang, China

Abstract: To address the insufficient dynamic balance control capability of an underactuated bicycle robot, a triple-loop PID dynamic balance controller is designed in this paper. A dynamic model is established and analyzed using the Lagrange method to derive the closed-loop transfer relationship among the body tilt angle, flywheel speed, and motor torque. Based on the dynamic model, a triple-loop PID controller consisting of a speed loop, an angle loop, and an angular velocity loop is developed. Meanwhile, the stability of the system is analyzed using a small-angle linearized model. Finally, real-vehicle experiments are carried out to verify the proposed method. The experimental results show that the triple-loop control method can keep the bicycle robot balanced within a certain tilt-angle range and enable it to recover stability quickly after external disturbances.

Keywords: underactuated bicycle robot; dynamic balance; reaction flywheel; triple-loop PID; attitude control